INFORME FINAL PROYECTO PROINCE 55B/167

Título del Proyecto: Sistemas Grises y Conjuntos Rugosos en el tratamiento de información con incertidumbre.

Director del Proyecto: Galardo, Osvaldo Jorge

Integrantes del Proyecto:

- Perissé, Marcelo Claudio
- Roger, Juan Andrés
- Barreto, Jorge
- Malagrino, Sebastián
- Fusco, Patricia

Fecha de inicio: 2012/01/01

Fecha de finalización: 2013/12/31

Área de conocimiento: Matemática

Código de Área de Conocimiento: 1

Disciplina: Ciencia de los ordenadores

Código de Disciplina: 1203

Campo de Aplicación: Cálculo híbrido

Código de Campo de Aplicación: 120306

Resumen:

El rápido desarrollo y la extensa aplicación de la tecnología de bases de datos, unido a la gran cantidad de datos disponibles para el análisis en distintos ámbitos de las ciencias puras y aplicadas, ha convertido la minería de datos (data mining) y el descubrimiento de conocimiento (knowledge discovery) en áreas de intensa investigación. El conocimiento se ha convertido en un componente imprescindible en la industria, la banca e incluso en la vida social. En particular, los sectores económicos -tanto en las áreas de las manufacturas como de las finanzas- requieren tomar decisiones sobre gran cantidad de información para obtener ventajas competitivas. Sin embargo, la información es frecuentemente imprecisa debido a que contiene gran cantidad de datos pero es cualitativamente pobre.

La extracción de información comprensible a partir de grandes volúmenes de datos hace uso del proceso KDD (Knowledge Discovery in Databases)[1] que opera para obtener información subóptima pero económica y confiable para la toma de decisiones, en los casos en que la información es incompleta, inexacta o inconsistente. En las décadas pasadas se han desarrollado varias técnicas y teorías para tratar datos de naturaleza imprecisa, como la teoría fuzzy y la teoría de las funciones de creencia de Dempster-Shafer[2].

Esta investigación se centra en dos técnicas específicas: la teoría de conjuntos aproximados o rugosos (Rough Set Theory o RST)[3] y la teoría de sistemas grises (Grey Systems Theory o GST), y en la hibridación de ambas: Grey Rough Set Theory o GRST. Se exhiben las propiedades fundamentales de las tres teorías y se evalúa la conveniencia de generalizaciones y ampliaciones de dichas teorías para el tratamiento de información incierta.

[1] Fayyad (1996)

[2] Shafer (1990)

[3] También conocida como teoría de conjuntos ásperos o imprecisos.

Introducción

Selección del tema:

Tecnología de híbridos de computación soft en el tratamiento del descubrimiento de conocimiento en bases de datos.

Definición del problema:

Viabilidad de la hibridación RST- GST en información imprecisa con datos fijos y variables.

Justificación del estudio:

La toma de decisiones en el gerenciamiento de actividades comerciales, económicas, financieras y sociales se enfrentan a problemas complejos que contienen información cualitativamente pobre y cuantitativamente impreciso. La solución efectiva y a bajo costo de estos problemas requiere el aporte integrado de distintas disciplinas, tales como la ingeniería del conocimiento, ciencias de la computación, la información y los sistemas.

En particular, los sistemas grises e imprecisos combinados en hibridaciones variadas constituyen una alternativa efectiva proveniente de la computación soft.

Limitaciones:

Este estudio se concentra en las componentes teóricas esenciales de RST, GST y GRST y la evaluación de dichas hibridaciones, pero no considera aplicaciones específicas.

Alcances del trabajo:

La investigación realizada permite establecer una base inicial para la aplicación posterior de sistemas híbridos en el estudio de problemas sociales y económicos específicos de nuestro país. Asimismo, facilita el análisis y la discusión de los fundamentos teóricos de la hibridación considerada.

Objetivos:

1. Exponer los componentes teóricos básicos de RST
2. Exponer los componentes teóricos básicos de GST
3. Exponer los componentes teóricos básicos de GRST y su viabilidad.

Hipótesis:

La formulación teórica de la hibridación GRST mejora las limitaciones de RST y GST por separado.

Desarrollo

Material y métodos:

Se analizó bibliografía actualizada de ambos sistemas y su hibridación a nivel teórico y meta teórico. Se consideraron: A) las características principales de cada uno; B) las ventajas y limitaciones de cada uno; C) las mejoras y generalizaciones obtenidas en investigaciones recientes.

Descripción del objeto de estudio:

Sistemas de análisis de sistemas de información incierta, pobre o incompleta tratadas con RST, GST y GRST.

Diseño de la Investigación:

Se desarrollaron las componentes esenciales de: 1) RST; 2) GST; 3) GRST como se detalla a continuación en “Resultados”

Resultados:

1. Estructura de Rough Set Theory (RST)

RST (Rough Set Theory) fue propuesta por Zdzislaw Pawlak en 1982[4] como una nueva y potente herramienta matemática para tratar información vaga o imprecisa. La idea básica es la clasificación de objetos (concretos o abstractos, como señales, eventos, procesos, entidades) incluyendo en el mismo conjunto a objetos que posean diferencias menores entre sí. Por lo tanto, objetos que portan la misma o similar información son indiscernibles (respecto de la información disponible). Las unidades de distintos conjuntos indiscernibles son los conjuntos de elementos que componen el universo de la información disponible[5].

RST establece definiciones precisas (es decir, lógico-matemáticas) de los componentes conceptuales básicos y obtiene, en su modelización, los teoremas que facilitan las aplicaciones y desarrollos específicos.

En RST de define la Relación de Indiscernibilidad en el universo de datos; dicho universo está formado por subconjunto de objetos y propiedades. Con relación a una propiedad y dado un objeto perteneciente a un subconjunto del universo puede darse: A) que el objeto pertenezca absolutamente (o, con la misma imprecisión semántica: 'seguramente') al subconjunto; B) que el objeto no pertenezca absolutamente al subconjunto; C) que el objeto pueda pertenecer, o no, al subconjunto. Debido al punto C) queda claro que el subconjunto en cuestión es impreciso y para manejarlo se requieren dos conceptos centrales de RST: aproximación superior y aproximación inferior, ambas definidas en conexión con la relación de indiscernibilidad.

La aproximación inferior es la unión de todos los objetos que pertenecen absolutamente al subconjunto y se conoce como región positiva del subconjunto.

---

[4] Pawlak (1982)

[5] Jiang y Lin (2011), pp. 17

La aproximación superior es el menor conjunto de elementos que pueden pertenecer aparentemente al subconjunto en análisis. La región negativa contiene los objetos que no pertenecen al subconjunto. La diferencia entre la aproximación superior y la aproximación inferior es la frontera o límite que no puede ser evaluada respecto del atributo en cuestión, porque allí los objetos no pueden clasificarse como pertenecientes ,o no, al subconjunto. Si la frontera es vacía, entonces el subconjunto es exacto en términos de indiscernibilidad; si la frontera no es vacía, el subconjunto es rugoso (áspero, impreciso) considerando dicha relación.

El sistema de información (o de representación) sobre el que opera RST está formado por el universo de subconjuntos de objetos, el conjunto de propiedades o atributos y la función cuyo dominio es el producto cartesiano de subconjuntos del universo por subconjuntos de propiedades y cuya imagen es el conjunto formado por los subconjuntos en los que se asignan objetos a la propiedad dada.

Las definiciones fundamentales que se dan a continuación corresponden al enfoque original de RST, pero existen formas alternativas[6] basadas en relaciones distintas a la de indiscernibilidad (que es una relación de equivalencia): A) en base a la relación de similaridad, que no genera particiones del universo de objetos y retiene la reflexividad pero no la simetría ni la transitividad; B) en base a relaciones binarias reflexivas y transitivas

<u>Definiciones fundamentales</u>:[7]

1. Sea $U = \{U_1,\ldots U_{/U/}\}$ un conjunto finito y no vacío de conjuntos (U es el espacio del universo de conjuntos de objetos).

2. Sea $A = \{A_1,\ldots,A_{/A/}\}$ el conjunto finito y no vacío de atributos.

[6] Xu y Tao (2012), cap. 1
[7] Jiang y Lin (2011), cap. 2

3. Sea f: U x A → V, $\forall a \in A, \forall x \in U\ y\ f(x, a) \in V_a$ una función de información que nombra el valor del atributo de cada objeto en U.

4. Considerando lo anterior, la cuaterna S = (U, A, V, f) es un sistema de información (o sistema de representación del conocimiento).

5. Los objetos x e y se consideran indiscernibles si satisfacen la relación de indiscernibilidad

$$I = \{(x, y) \in U \times U : f(x, q) = f(y, q) \forall q \in P\}$$

6. Aproximación inferior $\underline{apr}_p\ (X) = \cup \{x \in U : I(x) \subseteq X\}$

7. Aproximación superior: $\overline{apr}_p(X) = \cup \{x \in U : I(x) \cap X = \phi\}$

8. Región negativa: $neg_P(X) = \cup \{x \in U : I(x) \cap X = \phi\}$

9. Frontera: $bnd_p(X) = \overline{apr}_p - \underline{apr}_p(X)$

10. Si las aproximaciones coinciden, entonces el subconjunto *X* está bien definido en S. En caso contrario hay cuatro casos en que *X* no puede ser definido con relación al sistema de información S (y relativo a la propiedad P):

    A. Si la aproximación inferior no es vacía y la aproximación superior es distinta de U, entonces *X* está definido rugosamente (imprecisamente) en S.

    B. Si la aproximación inferior no es vacía y la aproximación superior es igual a U, entonces *X* no puede ser definido afuera de S, por lo que no se puede excluir que cada objeto de *X* pertenezca a U.

C. Si la aproximación inferior es vacía y la aproximación superior es distinta de U, entonces *X* no puede ser definido en el interior de S, por lo que no se puede asegurar que cada objeto x de U pertenezca a *X*.

D. Si la aproximación inferior es vacía y la aproximación superior coincide con U, entonces el conjunto no puede ser definido totalmente en S; o sea que ni siquiera podemos definir su aproximación.

Estos cuatro casos exhiben los distintos niveles de indefinición que existen entre el nivel 'definido' y el nivel 'indefinido'.

11. Dado un sistema de información $S = (U, A, V, f)$ y la relación de indiscernibilidad en *U*, es necesario definir el grado de dependencia entre dos atributos diferentes, de la siguiente manera:

Sea $S = (U, A, V, f)$; si $P \subseteq A, Q \subseteq A$ entonces la dependencia entre conjuntos de atributos se define de la siguiente forma:

A. Si $I(P) \subseteq I(Q)$, entonces el conjunto atributo *Q* depende del conjunto atributo *P* y se indica $P \Rightarrow Q$

B. Si $P \Longrightarrow Q\ y\ Q \Longrightarrow P$ entonces ambos atributos son equivalentes; o sea: $P \Leftrightarrow Q$

C. Si no se puede sostener $P \Longrightarrow Q \vee Q \Longrightarrow P$ entonces *P* y *Q* son independientes.

12. Dado que para un subconjunto *X* perteneciente a *U* se tiene una aproximación superior (por exceso) y una inferior (por defecto), se define la Precisión Aproximada de *X* de la siguiente forma:

$$\alpha_P(X) = \frac{C(\underline{apr_p})}{C\ (\overline{apr}_p)}$$

donde $\mathcal{C}$ indica la cardinalidad del conjunto. La precisión aproximada da valores en el intervalo: $0 \leq \alpha_P(X) \leq 1$. Si $\alpha_P(X) = 1$ el conjunto *X* es exacto respecto de *I* (relación de indiscernibilidad). Si $\alpha_P(X) < 1$ entonces *X* es rugoso (aproximado o áspero) respecto de *I*. La Precisión Aproximada indica el grado de comprensión de *X* según el conocimiento existente.

13. Para medir la dependencia del conocimiento se requiere definir la calidad de la clasificación que se expresa como el cociente entre la sumatoria de los objetos correctamente clasificados por el subconjunto correspondiente al atributo *P* y todos los objetos del sistema:

$$\gamma_P(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}[\underline{apr_p}(X_i)]}{\mathcal{C}(U)},$$

donde $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una partición del universo U y $P \subseteq A$. Se dan tres casos para la calidad del conocimiento:

A. Si $\gamma_P = 1$, entonces el conocimiento de *X* es completamente dependiente en *P*
B. Si $\gamma_P = 0$, entonces el conocimiento de *X* es completamente independiente en *P*
C. Si $0 < \gamma_P < 1$, entonces el conocimiento de X es parcialmente dependiente en *P*

14. Membresía o pertenencia rough[8]: $\mu_X^I(x) = \frac{\mathcal{C}(X \cap I(x))}{\mathcal{C}(I(x))}$ con $\mu_X^I(x) \in [0,1]$ a diferencia de los conjuntos clásicos donde $\mu_X = 1$ si $x \in X$ y 0 en cualquier otro caso. Esta función expresa la incertidumbre de un elemento $x \in X$.

[8] En las definiciones siguientes: Pawlak (1996)

15. Relaciones rough: dados dos sistemas de información X e Y con respectivas relaciones de indiscernibilidad I_1, I_2 , la relación $R \subseteq X \times Y$ y $I = I_1 \times I_2$. En estas condiciones, la relación de indiscernibilidad opera sobre R y se denota $I(x, y)$ donde $x \in X, y \in Y$. La relación rugosa se puede definir usando la pertenencia rugosa, como en 10:

$$\mu_R^I(x, y) = \frac{C(R \cap I(x,y))}{C(I(x,y))}$$

16. Funciones rough: se obtiene una definición adecuada y compatible con las aplicaciones concretas, haciendo las siguientes consideraciones:

A. El sistema de información $S \subseteq R^+$, con $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ tal que $x_1 < x_2 < \cdots < x_i$, categoriza a R^+ y el par $A = (R^+, S)$ es un Espacio de Aproximación, porque cada categorización S deR^+ induce una partición $\pi(S)$ en R^+.
B. Denotando (x_i, x_{i+1}) al intervalo abierto que contiene a x y S_x al segmento de la partición que contiene a s, el intervalo cerrado $[x_i, x_{i+1}]$ es la clausura de S_x y se denota $\bar{S}_x$.
C. En particular $\forall x \in R^+$: $Q(x) = [0, x]$ se entiende como una aproximación de $x \in R^+$, que resulta ser el extremo derecho de $S(x)$.
D. S es una relación de indiscernibilidad en R^+ que da aproximaciones de $Q(x)$ en $A = (R^+, S)$
E. La aproximación inferior de $x \in R^+$ es:

$$S_{inferior}Q(x) = \{y \in R^+ : S(y) \subseteq Q(x)\}$$

F. La aproximación superior de $x \in R^+$ es:

$$S^{superior}Q(x) = \{y \in R^+ : S(y) \cap Q(x) \neq \varnothing\}$$

G. Por lo anterior: si $S^{superior} = S_{inferior}$ entonces *x* es exacto en *A.*

H. En otro caso *x* es inexacto (rough, áspero) en *A*.

I. Se define la función de pertenencia rough para x en R^{+} de la siguiente forma:

$$\mu_{Q(x)}(y) = \frac{\mathcal{C}(\mathrm{Q(x)} \cap \mathrm{S(y)})}{\mathcal{C}(S(y))}$$

Esta función indica el grado de pertenencia de un elemento y en $Q(x)$.

J. Dada la función real $f: X \to Y$ con $X, Y \in R^{+} \cup \{0\}$ y dados los espacios de aproximación $A = (X, S)$, $B = (Y, P)$,

   a) se llama aproximación inferior SP a:

$$f_{inf}(x) = P_{inf}(f(x)) \ \forall x \in X$$

   b) se llama aproximación superior SP a:

$$f^{sup}(x) = P^{sup}(f(x)) \ \forall x \in X$$

K. Se dice que f es exacta en x si $f_{inf} = f^{sup}$; en otro caso f es rugosa.

L. El error de aproximación de f en x es $f^{sup} - f_{inf}$

La concepción original de RST debida a Pawlak tiene una clara naturaleza topológica, como puede inferirse de la definiciones anteriores. Posteriormente se desarrolló una noción topológica más general de RST que tiene un interés independiente, ya que se trata de una aproximación independiente a la de Pawlak. Ambas formas pueden resumirse de la siguiente forma[9]:

[9] Salama (2011)

A) Forma topológica original: se define un Espacio de Aproximación (U, R) donde U es el universo y $R \subset U \times U$ es la anterior *I*, o sea la relación de indiscernibilidad. Las clases de equivalencia U/R son los átomos o conjuntos elementales. El par (U, R) se asimila a un espacio topológico (U, t) donde t define la relación de equivalencia R_t en el conjunto potencia P(U). La clase de subconjuntos de U es llamada una clase topológica rugosa, o imprecisa o áspera, denominada RO(U), si para cada X e Y en RO(U) se verifica:

   1) int(X) = int (Y); 2)
   2) cl(X) = cl(Y)

B) Forma alternativa de clases topológicas rugosas: Sea, como antes, el espacio topológico (U,t). Un par (M; N) –con M y N subconjuntos de U- es un par rugoso en (U,t) si satisface las siguientes condiciones:

   1) M es un conjunto abierto
   2) N es un conjunto cerrado
   3) $M \subset N$
   4) El conjunto N-cl(M) contiene un subconjunto Z que satisface int(Z)=□ y N-cl(M) $\subset$ cl(Z)

Se considera que la forma topológica original facilita el descubrimiento de relaciones ocultas entre datos, mientras las generalizaciones topológicas rugosas ayudan en la definición de medidas topológicas rugosas.

La interacción entre los fundamentos matemáticos del modelo RST y las aplicaciones concretas empuja el desarrollo de la teoría y mejora las posibilidades de subsiguientes aplicaciones, que son frecuentes en Economía y Administración. Existen experiencias específicas en Marketing que muestran la conveniencia del uso de RST con propósitos de clasificación en análisis de marcas comerciales, por ejemplo de cereales[10] donde también se aplica Análisis Discriminante Lineal y se comparan resultados que muestran la eficacia de RST en estudios de posicionamiento diferencial.

Las mejoras en la teoría van en dos direcciones principales: A) la hibridación con otros métodos (al que se hará referencia más adelante con GST; B) la generalización de la teoría original. Se puede mostrar que distintas formulaciones de RST permiten el desarrollo de variadas formas generalizadas, lo que, adicionalmente, muestra que ambas direcciones se contactan frecuentemente[11].

[10] Beynon, Curry & Morgan (2001)
[11] Yao (2003)

2. Estructura de Grey System Theory (GST)

El mismo año (1982) que Pawlak propone RST, el investigador chino Julong Deng presenta su teoría de Sistemas Grises (GST) que, en poco menos de una década, tiene una aplicación exitosa en gran variedad de campos como agricultura, hidrología, historia, ecología, medicina, geografía, ciencias de los materiales, protección biológica, sistema judicial, industria, temas militares y en distintas áreas de la Economía. En China se aplicó exitosamente en economía agrícola, estimación de efectos económicos, modelos diagnósticos en medicina, protección biológica y meteorología.

Según el autor de GST[12], 'grey' es un término que –relativo a la información que provee un sistema- significa 'pobre', 'incompleta', 'incierta'. En este sentido, gran cantidad de sistemas complejos son grises porque varios de sus parámetros son inciertos o desconocidos; un ejemplo concreto es el cuerpo humano porque varios parámetros de su medio interno no se conocen o la información disponible es pobre.

Cuando la información es pobre, imprecisa o incompleta, GST provee alternativas que para procesos y modelos estocásticos, análisis de regresión o análisis de series de tiempos. Dado que los métodos estadísticos tradicionales requieren funciones de distribución de probabilidad y en el mundo real tales funciones no están usualmente disponibles, la modelización en variables grises puede satisfacer las necesidades de conocimiento.

GST comprende varias áreas: matemática gris, espacios relacionales grises, control gris, generación de espacios grises y modelización gris, entre otros. La modelización gris en una variable (GM 1,1) y el Análisis Relacional Gris (GRA) son dos de los métodos usados frecuentemente[13].

La unidad o célula de un sistema gris es el número gris, que expresa el carácter del comportamiento del sistema gris. De un número gris se conoce el rango de

[12] Deng (1989)
[13] Lu & Vewers (2006)

valor aunque se desconoce el valor preciso. Los sistemas con información completa son sistemas “blanqueados” (whitening) o “blancos”, los que carecen completamente de información son sistemas “negros” y los que contienen información pobre o incompleta son sistemas grises.

Dado que el número gris expresa la calidad de la información analizada, una cuestión fundamental de GST consiste en aumentar la precisión del valor original; es decir, en hacer que el número gris del sistema se logre “blanquear”.

Las definiciones básicas de GST son las siguientes[14]:

Tipos de números grises[15]

1. Números grises con sólo límites inferiores, simbolizados $x \in [\underline{a}, \infty]$
2. Números grises con sólo límites superiores, simbolizados $x \in [-\infty, \overline{a}]$
3. Números grises con límites inferiores y superiores, simbolizados $x \in [\underline{a}, \overline{a}]$[16]
4. Números negros: cuando $x \in [-\infty, +\infty]$
5. Números blancos: cuando $\underline{a} = \overline{a}$

Dado que la información gris significa que es incierta (y por lo tanto su expresión numérica es estimada), la clasificación anterior expresa que en los casos 1 y 2 sólo puede estimarse un extremo y en el caso 4 no hay estimación posible. El caso 5 corresponde a la información precisa.

El caso 3 es especial interés porque permite establecer definiciones centrales para las aplicaciones.

En principio interesa definir la longitud del número gris x: $l(x) = |\overline{a} - \underline{a}|$ que indica la amplitud (e intuitivamente la imprecisión) que expresa el intervalo gris. Para que la información pueda emplearse efectivamente se requiere adoptar un valor específico perteneciente al intervalo gris que se denomina ‘blanqueamiento’

[14] JIan, Liu & Lin (2011), cap. 6. Los autores sustituyen la notación original de números grises ‘$\otimes$’ por ‘x’

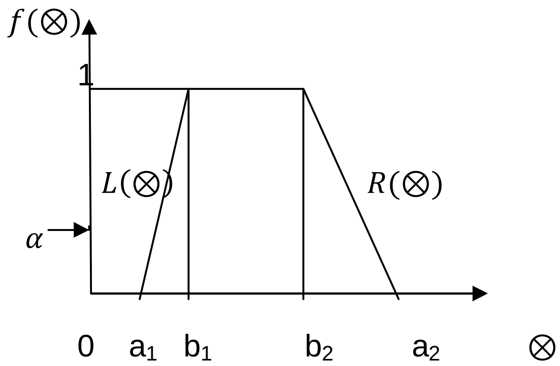
[15] Los autores no siguen la notación adoptada en Matemática para intervalos con extremos abiertos, como corresponde con $\pm\infty$, y que usan otros autores.

[16] También esta notación es confusa porque ‘a’ no puede ser a la vez el extremo superior e inferior, salvo que la distancia sea cero, en cuyo caso se trata de un número blanco.

(o 'blanqueo') de números grises. Este blanqueo adquiere distintas formas según el caso[17,18]. Empleando '$\otimes$' en lugar de 'x' para números grises, las definiciones básicas son las siguientes:

1. Si la información oscila marcadamente alrededor de un valor específico, dicho valor es considerado el valor blanco, es decir la información buscada.
2. Para un intervalo gris donde $\otimes \in [a_1, a_2]$ el valor de blanqueo de $\otimes$, denominado '$\widetilde{\otimes}$', es $\widetilde{\otimes} = \alpha a_1 + (1-\alpha) a_2$, con $\alpha \epsilon [0,1]$
3. Un número gris puede blanquearse por medio de la *función de peso de blanqueo* f($\otimes$), que tiene la siguiente forma general:

$$f(\otimes) = \begin{cases} L(\otimes)\ si\ \ \otimes \epsilon [a_1, b_1) \\ 1\ si\ \ \otimes \epsilon [b_1, b_2] \\ R(\otimes) si\ \ \otimes \epsilon (b_2, a_2] \end{cases}$$



Para esta función, $\widetilde{\otimes}$ se transforma en un número $\otimes$ que se halla en un intervalo que depende de a_1, b_1, b_2, a_2 y de α:

$$\otimes = [\alpha a_1 + (1-\alpha) b_1, \alpha b_2 + (1-\alpha) a_2]$$

[17] Liu & Lin (2006) pp. 26-32. Se respeta la notación clásica usada por los autores: en lugar de 'x' se emplea '$\otimes$' para indicar un número gris.
[18] Olson, Wu (2006)

La función de peso de blanqueo se construye en base a la experiencia del analista. Los extremos a_1 y a_2 son los valores que tienen alguna significación independiente ya que indican entre qué valores se comporta la información. El valor de α pondera el blanqueo de la información y también es asignado según por el experto que realiza el estudio.

4. Para operar con la función de blanqueo incluso en los casos en que no es bien conocida, se define el *valor medio de blanqueo del número gris* y se denomina con el término $'\widehat{\otimes}'$.
   A. Si la función de blanqueo del número gris es conocida entonces el valor medio es el valor esperado, en el caso que el número gris corresponda a una variable aleatoria en el sentido estadístico.
   B. Si la función de blanqueo no es conocida y el número gris adopta valores reales entonces $\widehat{\otimes} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.
   C. Si la función de blanqueo no es conocida y $\otimes$ adopta valores discretos en $[a_1, a_2]$ con $a_i \epsilon\ [a_1, a_2]$ con $i = 1,2, \ldots$ entonces[19]:

$$\widehat{\otimes} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ (\otimes\ adopta\ un\ número\ finito\ de\ valores) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ \otimes\ adopta\ valores\ infinito\ numerables \end{cases}$$

5. Dado un número gris $\otimes$ interesa saber el *grado de gris* de dicho número:

$$g^o(\otimes) = \frac{l(\otimes)}{|\widehat{\otimes}|}$$

donde $l(\otimes)$ es la longitud del número gris.

[19] Liu & Lin(2006) pp. 34

6. Considerando la *función de peso de blanqueo* indicada en el punto 3, el *grado de gris* de $\otimes$ se puede definir de la siguiente forma[20]:

$$g^o(\otimes) = \frac{2|\ b_1 - b_2|}{b_1 + b_2} + \max\left\{\frac{|\ a_1 - b_1\,|}{b_1}, \frac{|\ a_2 - b_2\,|}{b_2}\right\}$$

El sumando izquierdo indica el impacto del pico de $f(\otimes)$, donde la función Es máxima (α=1). El sumando derecho indica el impacto de $L(\otimes)\ y\ \ R(\otimes)$.

7. Debido a que las relaciones que se establecen en la matemática gris comprenden variables y números grises, se definen secuencias grises, ecuaciones algebraicas con coeficientes grises, vectores grises, matrices grises n-dimensionales, autovalores y autovectores grises. En particular, interesan las derivadas y ecuaciones diferenciales grises ya que constituyen la base de los modelos grises.

8. Generación de sucesiones grises: los sistemas grises elaboran reglas para cambiar los datos crudos, generalmente complejos, en datos que muestren ciertas regularidades en esos mismos datos por medio de la generación de sucesiones grises, que son tratadas por métodos específicos, en particular 1-AGO (first order accumulate generating operation) y 1-AGO data sequence que suaviza los datos originales obteniendo sucesiones monótonas y extrayendo de ellos regularidades no explícitas en la forma original[21]. Dada una sucesión de números reales $x^{(0)} = x^{(0)}(t_1)$, $x^{(0)}(t_2), \ldots, x^{(0)}(t_n)$ con distribución irregular, donde $x^{(0)}(t_i)$ es la sucesión de datos de información en el momento t_i, si $\Delta\ t_i = t_i - t_{i-1}$ no es constante, entonces $x^{(0)}$ es una sucesión no equidistante. Tal

[20] Nabwey & El-Paoumy (2013)
[21] Li, Yamaguchi & Nagai (2006b)

sucesión puede tratarse con 1-AGO si $\forall x^{(1)}(t_j) \in x^{(1)}$ satisface la condición $x^1\left(t_j\right) = \sum_{i=1}^{j} x^{(0)} t_{(i)}$ con $x^{(0)} t_i \in x^{(0)}$.

Los datos originales pueden recuperarse haciendo $x^{(0)}(t_i) = x^{(1)}(t_i) - x^1(t_{i-1})$ donde $x^{(0)}(t_1) = x^{(1)}(t_1)$ con $x^{(0)}(t_1) = x^{(1)}(t_1)$.

9. El modelo GM (1,1) es un modelo gris de primer orden con una variable y puede construirse estableciendo para $x^{(1)}(t_k)$ la ecuación diferencial[22]:

$$\frac{dx^{(1)}(t_k)}{d(t_k)} + ax^{(1)}(t_k) = b$$

10. Existen otros modelos que mejoran el anterior como DGM (2,1) de 2º orden con una variable [23] y extensiones de éste, como SDGM, MDGM y EDGM[24].

[22] Chang & Tung (2006)
[23] Shao & Su (2012)
[24] Xie & Liu (2009)

3. Estructura de la Hibridación RST-GST (GRST)

RST y GST son contemporáneas en su origen y ambas efectivas en computación soft para tratar con sistemas de información que contienen datos imprecisos. Por supuesto, no son las únicas y un ejemplo muy próximo es el sistema fuzzy o borroso. En casi todos los casos los términos utilizados para denominar estas distintas teorías son sólo nombres que permiten identificarlas y en su elección se privilegia la idea de imprecisión asociada a alguna intuición generalmente sensorial: rugoso/áspero (táctil), borroso (visual) o gris (color). Esta costumbre ya es habitual en otros ámbitos científicos como en Física de Partículas donde se recurre a términos como 'quark up' y 'quark down' que son simples etiquetas para diferenciar distintos objetos físicos.

Aunque dicha elección es creativa, en el caso específico de RST y GST introduce cierta confusión inicial porque todas se refieren a información imprecisa pero el término empleado en cada caso (rough, grey) no da ninguna pista sobre el enfoque de cada una[25]. Desde ya, esto se soluciona analizando las estructuras axiomáticas[26] respectivas lo cual es imprescindible no sólo para lo anterior sino, y principalmente, para evaluar la posibilidad y la conveniencia del uso asociado (hibridación) a fin de explotar lo mejor de cada teoría. Este último punto es particularmente delicado porque involucra varios aspectos a tener en cuenta, entre ellos: cómo trata la imprecisión del sistema informativo cada teoría; en ese caso, si es viable una aplicación sucesiva de técnicas o es aconsejable, en cambio, una integración; cuántas técnicas conviene hibridar a la vez. Sin embargo, las técnicas de hibridación son una opción a tener en cuenta porque cada teoría tiene aplicaciones específicas y ninguna –hasta ahora- resuelve todos los problemas.

En la actualidad están disponibles numerosas aplicaciones donde se emplean variadas hibridaciones de teorías incluyendo distintas versiones de las mismas

[25] El término 'teoría' se emplea –en este ámbito- haciendo referencia a la axiomática conjuntista empleada para especificar los fundamentos, demostrar las propiedades obtenidas y justificar los modelos de aplicación que forman parte de la teoría.

[26] Aquí se emplea el término 'axiomática' en un sentido más débil que el empleado en Lógica y Matemática.

hibridaciones para usos específicos, que pueden resultar equivalentes en resultados. Éste es el caso de la hibridación que se analiza en este trabajo (RST-GST), para la cual se han descripto distintas asociaciones como[27]: aproximaciones rugosas basadas en conjuntos grises y funciones de blanqueo; o RST basada en álgebra de intervalos que soportan operaciones con retículos grises. También se han descripto equivalencias entre hibridaciones RST-GST con extensiones de RST y la asociación RST-GST con el análisis de conceptos formales (FCA)[28].
La diferencia entre incertidumbre rugosa (o áspera) y gris puede mostrarse de la siguiente forma[29]:

Incertidumbre rugosa: sea $\mathcal{U}$ un conjunto de elementos de un sistema o universo de información y $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ el conjunto potencia de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{r} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se dice que $\mathcal{r}$ es una partición de $\mathcal{U}$ si se cumple: a) $\cup_r = \{x : x \in r\} = \mathcal{U}$; b) $\forall\, A \epsilon \mathcal{r}, \forall B \mathcal{E} \mathcal{r}, A \neq B \rightarrow A \cap B = \varnothing$.
Sea $\mathcal{K} = (\mathcal{U}, \mathcal{R})$ el par donde $\mathcal{U}$ es el universo de información y $\mathcal{R}$ una partición de $\mathcal{U}$ y sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$. Se dice que $\mathcal{X}$ es exacto en $\mathcal{K}$ si $\exists \mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$: $\mathcal{X}$ es la unión de algunos elementos de $\mathcal{P}$. En otro caso, $\mathcal{X}$ es rugoso en $\mathcal{P}$.

Incertidumbre gris: sea x el valor desconocido de una cualidad en estudio en un sistema de información y $\mathcal{S} \neq \varnothing$ un conjunto de valores posibles del sistema de información. Sea $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, entonces $x \in \mathcal{S}' \rightarrow x \in \mathcal{S}$. Se dice que x es un número gris si se desconoce el valor que adopta en $\mathcal{S}'$.

Si se comparan ambas definiciones se ve que: A) RST se basa en la partición en subconjuntos del sistema de información y evalúa si la parte en estudio se puede expresar como unión de algunos subconjuntos del sistema de información; esto es: se trata de un método de aproximación de subconjuntos por exceso y defecto

[27] Wu (2010)
[28] Wu & Liu (2009)
[29] Liu & Lin (2006) pp. 13-19

del valor incierto; B) GST considera los valores desconocidos, del dato requerido, en ciertos sub intervalos del sistema de información; dichos intervalos pueden adoptar valores reales o subconjuntos de reales y mientras un número blanco está precisado, un número gris indica un intervalo de datos.

Así, la conexión de ambas teorías parece posible, pues mientras RST da conjuntos de aproximación, GST da resultados de valores en el intervalo del conjunto aproximado. En RST, los extremos de la función de pertenencia (o membresía) indican que: A) un objeto pertenece a la clase *X* si $\mu_X(x) = 1$; B) un objeto no pertenece a la clase *X* si $\mu_X(x) = 0$. En ambos casos la clasificación es precisa y por lo tanto el grado de gris del número gris que se le puede asociar es mínimamente incierto, pero si $\mu_X(x) \cong 0.5$ el grado de gris del número gris correspondiente se incrementa. La idea es establecer grados de gris superior e inferior, asociados a los respectivos grados rugosos, lo que instala niveles de grados de gris como consecuencia de llevar a GST la forma conjuntista de RST.

La conexión formal la dan las siguientes definiciones[30]:

1) Funciones superior e inferior de pertenencia rough:
    a. Superior: $\overline{\mu}_X(x) \in [0.5, 1.0]$
    b. Inferior: $\underline{\mu}_X(x) \epsilon [0.0, 0.5)$
    c. Propiedad básica: $\overline{\mu}_X(x) = 1 - \underline{\mu}_X(x)$
2) Mapeo 'función media rough → grado de gris del número gris':
    a. $\overline{\mu}_X(x) \rightarrow \overline{g}_X(x)$
    b. $\underline{\mu}_X(x) \rightarrow \underline{g}_X(x)$

[30] Jian, Liu & Lin (2011), pp. 185-196

3) Niveles de gris asociados a función de pertenencia rough[31]:

A) El nivel del grado de gris de un número gris se denota 'g_c'

El grado de número blanco (grado cero) se define:

$$g_c = 0: \underline{\mu}_X(x) = 0 \Rightarrow \underline{g_c} = 0 \wedge \overline{\mu}_X(x) = 1 \Rightarrow \overline{g}_c = 0$$

B) El grado 1 de números grises se define:

$$g_c = 1: \underline{\mu}_X(x) \epsilon (0, 0.1] \Rightarrow \underline{g_c} = 1 \wedge \overline{\mu}_X(x) \epsilon [0.9,1) \Rightarrow \overline{g}_c = 1$$

C) El grado 2 de números grises se define:

$$g_c = 2: \underline{\mu}_X(x) \epsilon (0.1, 0.2] \Rightarrow \underline{g_c} = 2 \wedge \overline{\mu}_X(x) \epsilon [0.8,0.9) \Rightarrow \overline{g}_c = 2$$

D) El grado 3 de números grises se define:

$$g_c = 3: \underline{\mu}_X(x) \epsilon (0.2, 0.3] \Rightarrow \underline{g_c} = 3 \wedge \overline{\mu}_X(x) \epsilon [0.7,0.8) \Rightarrow \overline{g}_c = 3$$

E) El grado 4 de números grises se define:

$$g_c = 4: \underline{\mu}_X(x) \epsilon (0.3, 0.4] \Rightarrow \underline{g_c} = 4 \wedge \overline{\mu}_X(x) \epsilon [0.6,0.7) \Rightarrow \overline{g}_c = 4$$

F) El grado 5 de números grises se define:

$$g_c = 5: \underline{\mu}_X(x) \epsilon (0.4, 0.5] \Rightarrow \underline{g_c} = 5 \wedge \overline{\mu}_X(x) \epsilon [0.5,0.6) \Rightarrow \overline{g}_c = 5$$

G) El grado de números negros se define:

$$g_c > 5: \underline{\mu}_X(x) = \overline{\mu}_X(x) \quad \wedge \quad \underline{g_c} = \overline{g}_c > 5$$

H) Si los extremos inferior y superior del grado de gris coinciden en 0, la información no es incierta: el elemento pertenece o no pertenece según la función de membresía rough. La máxima incerteza se da cuando los grados inferior y superior de gris coinciden en 5 y la función de pertenencia es 0.5, mientras que para valores de gris mayores a 5 y extremos coincidentes de la función de membresía no hay información sobre el elemento.

[31] Nabwey & El-Paoumy (2013)

I) Aproximaciones gris-rugosas[32]: por lo anterior, corresponden al nivel de gris $g_c \leq 5$ y suponiendo que $S = (U, A, V, f), A = C \cup D, X \subseteq U, P \subseteq C$ establecen las aproximaciones superior e inferior de X conectando el grado de gris con la relación de Indiscernibilidad en S

a) $$\underline{apr}_P^{g_c}(X) = \cup \{\frac{\mathcal{C}(I_P(x) \cap X)}{\mathcal{C}(I_P(x))} \leq \overline{g}_c\}$$

b) $$\overline{apr}_P^{g_c}(X) = \cup \{\frac{\mathcal{C}(I_P(x) \cap X)}{\mathcal{C}(I_P(x))} > \overline{g}_c\}$$

Las expresiones a) y b) muestran que las aproximaciones del nivel de grado de gris al nivel g_c está dada por la unión de todas las clases de equivalencia pertenecientes a X iguales o menores (a), o mayores (b), a dicho nivel.

J) La medida de la proporción de objetos en el universo en el cual es posible la clasificación al nivel $g^o \leq V$ se define:

$$\gamma_P^{g_c}(P, D) = \frac{\mathcal{C}\left\{\frac{\mathcal{C}\left(X \cap I_P(x)\right)}{\mathcal{C}\left(I_P(x)\right)} \leq \overline{g}_c\right\}}{\mathcal{C}(U)}$$

En RST la clasificación de objetos es incierta si éstos se hallan en la región límite o frontera, pero si pueden asignarse a una clase específica puede obtenerse una clasificación para un nivel determinado de grado de gris de números grises.

[32] Jian, Liu & lin (2011) pp. 188-189

Si los niveles de gris corresponden a valores blanqueados puede emplearse la aproximación rough; en este sentido la precisión de la variable rough puede entenderse como un caso particular de la aproximación grey-rough.

Aunque no tiene valor de aplicación general, se ha observado que existe un intervalo de umbral de confianza para pasar de RST a GRST y en estos casos la discernibilidad de un elemento en RST depende de cierto valor β que debe ser superior al extremo superior del intervalo de umbral de confianza aunque, en la práctica y para series grandes de bases de datos, β es difícil de estimar.

La hibridación RST-GST (GRST) tiende a mejorar la clasificación de pertenencia de RST empleando la alta precisión predictiva de GST. En consecuencia, se complementa la dificultad para decidir pertenencia de RST empleando los niveles de gris de los números grises, que resultan como una consecuencia de la hibridación. A la vez, se mejora cierta deficiencia en la justificación teórica del grado de gris de los números grises al basar la definición de éstos en la función de pertenencia rough[33].

En RST la aproximación inferior describe información cierta, la información superior describe información posible y la frontera o límite describe información incierta y hay que tener en cuenta que los conjuntos respectivos son estáticos; debido a ello no se adapta a fenómenos dinámicos en los cuales algunos elementos cambian en función del tiempo y por lo tanto varían su pertenencia relativa a los conjuntos de aproximación. Para superar estas dificultades, se propusieron los conjuntos rugosos singulares (S-rough sets o S-RST)[34]. Sin embargo, ni RST ni S-RST son eficientes para tratar con atributos de objetos que tienen valores en intervalos numéricos, por lo que se desarrolló la asociación S-RST con GST (conjuntos S-gris rugosos o S-GRS)[35]. También se han reportado otras asociaciones con aplicaciones variadas[36].

---

[33] Jian, Liu & lin (2011) pp. 190-191
[34] Shi (2005)
[35] Hu & Wang (2011)
[36] Wu (2010)

Discusión de resultados:

A) El estudio y análisis de información imprecisa trata el problema general del análisis de datos para los cuales no es posible la asignación definida de alguna propiedad específica. Dicho brevemente: respecto de cierta propiedad, no es posible decidir si el dato en cuestión la cumple o no la cumple.

B) RST enfoca el problema proponiendo aproximaciones por defecto y por exceso, donde la imprecisión corresponde a los casos en que ambas aproximaciones difieren. En esos casos, se define la precisión aproximada y la calidad de la clasificación, en tanto que la incertidumbre se expresa por la función de pertenencia que es una función media de aproximación.

C) GST también hace estimaciones inferiores y superiores y –como en RST- la precisión se da cuando coinciden ambas estimaciones, pero GST evalúa la pertenencia en el intervalo real [0,1]. En forma similar a RST, acota la incertidumbre empleando límites –aunque con recorrido en el intervalo real [0,1]. La precisión aproximada se evalúa mediante la longitud de los números grises. La aproximación se mejora empleando la función de peso de blanqueo y estableciendo el valor medio del número gris, lo que permite definir la noción fundamental de grado de gris de los números grises.

D) GRST conecta RST y GST estableciendo un mapeo entre la función de pertenencia rough y el grado de gris, lo que permite definir la noción fundamental de niveles de gris asociados a la función de pertenencia rough.

E) Dado que la pertenencia rough está definida en función de la indiscernibilidad, ésta se conecta con el grado de gris.

F) Los niveles de grado de gris quedan asociados a la función media de pertenencia rugosa lo que permite graficar la función $f\colon \mu_X(x) \rightarrow g^o$, con $\mu_X(x) \in [0,1]$ y $g^o \in [0,5]$

G) La medida de la calidad de la clasificación gris-rugosa expresa el nivel dado de gris para el cual se determina la proporción de objetos posibles de clasificar para un atributo dado.

H) En la frontera rough la clasificación de objetos es incierta, pero el nivel de gris de de los números grises permite decidir en la mayoría de los casos.

I) Dada una cierta regla de clasificación, si el nivel de gris es bajo la regla puede asimilarse con buena aproximación a una determinística. Pero si el nivel de gris es alto (y, por lo tanto, la inconsistencia es fuerte), la regla puede ser tratada como aleatoria.

Conclusiones:

En numerosos fenómenos originados en distintas fuentes (biología, medicina, economía y sociología, entre otros), los procesos que llevan a la toma de decisiones deben realizarse en base a información imprecisa, pobre en calidad o incierta. En estos casos, el tratamiento estadístico clásico no es adecuado, por lo que se han desarrollado varias tecnologías de computación soft que tratan específicamente dichos problemas.

Con el objetivo de mejorar las deficiencias individuales de dichas tecnologías, se han desarrollado distintas integraciones (hibridaciones) de técnicas, generalmente por pares. La maduración de estas asociaciones muestra componentes conceptuales comunes que incluso las conectan, en ciertas modelizaciones, con la probabilidad clásica. Como ocurre habitualmente con los desarrollos teóricos fértiles, se han desarrollado numerosas variantes de cada teoría y de hibridaciones que muestran las interconexiones entre ellas. Es interesante destacar las conexiones que se han logrado establecer entre las teorías analizadas y los métodos estadísticos tradicionales[37], no obstante que aquéllas se desarrollaron para resolver algunas deficiencias de éstas.

También se observan desarrollos metateóricos que evalúan la existencia de leyes aproximadas en análisis de sistemas[38].

La riqueza en la evolución de estas técnicas y sus distintas combinaciones puede atribuirse a la fertilidad teórica que se exhibe en el amplio desarrollo de sus fundamentos y en la variedad de aplicaciones.

En el caso particular de GRST, la hibridación ha resultado satisfactoria en el tratamiento de información compleja, variable e incierta particularmente en Economía y Finanzas. En este aspecto, es importante destacar que GRST incorpora la experiencia del analista y algunas extensiones de la teoría, como en los modelos basados en relaciones de tolerancia (matemáticamente: reflexivas y simétricas) se emplean valores de umbral de información, superiores e inferiores, que mejoran los resultados[39].

Aunque se han realizado análisis comparativos[40] entre distintas técnicas, la tendencia actual parece orientarse a la diversificación y enriquecimiento teórico en las técnicas individuales y en las hibridaciones.

---

[37] Dembczynski et. al. (2007)
[38] Kaiquan & Jiarong (2006)
[39] Wu et. Al (2006)
[40] Ceccarelli & Maratea (2009)

BIBLIOGRAFÍA

Beynon, M; Curry,B; Morgan, P (2001): Knowledge discovery in marketing, European Journal of Marketing, Vol. 35, Nº 7/8, 915-935

Beynon, M; Peel, M (2001): Variable precision rough set and data discretisation: an application to corporate failure prediction, OMEGA,29,561-576

Bittner, T; Stell, G (2004): Stratified rough sets and vagueness, IFOMIS, Univ. of Leipzig

Ceccarelli, M; Maratea, A (2009): Concordance indices for comparing fuzzy, possibilistic, rough and grey partitions, Int. J. Knowledge Engineering and soft paradigms, Vol. 1 Nº 4, 331-344

Chang, T-C; Tung, I (2006): A Forecasting Model of Dynamic Grey Rough Set and its Application on Stock Selection, Cybernetics and Intelligent Systems, conference IEEE, 1-6

Cheng, J-H; Chen, H-P; Cheng, K-I (2009): Business Failure Prediction Model based on Grey Prediction and Rough Set Theory, Transactions of Information Science, issue 2; vol. 6, 329- 339

Coppi, R; Gil, M; Kiers; H. A-L (2006): The Fuzzy Approach to Statistical Analysis, Computational Statistics and data Analysis, Vol. 51, Issue 1, 1-14

Dembczynski, K. et. al (2007): Statistical Model for Rough Set Approach to Multicriteria Classification, Lecture notes in Computer Science, Vol. 4702, 164-175

Dempster, A.P. (1968): A generalization of Bayesian inference. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 30, 205-247

Deng, Julong (1989): Introduction on Grey System Theory, The Journal of Grey System Theory, 1, 1-24

Fayyad, Usama, et.al (1996): Knowledge Discovery and Data Mining: Towards a Unifying Framework, KDD 96 Proceedings, pp.82-88, IIIA Press, Portland

Grabowski, A; Jastrzebska, M (2009): On the Lattice of Intervals and Rough Sets, Formalized Mathematics, Vol. 17, Nº 4, 237-244

Herewan, T; Wan Mohd, W. M (2013): RMF: Rough Set Membership Function-based of Clustering Web Transactions, Internat. Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering,, Vol. 8, Nº 6, 105-118

Hu, H; Wang, Y (2011): S-grey Rough Set and Its General Characteristics, Journal of Information & Computational Science, 8:11, 2077-2087

Jian, L; Liu, S; Lin, Y (2011): Hybrid Rough Sets and Applications in Uncertain Decision-Making, CRC Press, Boca Raton

Kaiquan, K; Jiarong,X(2006): Function S-Rough Sets and Mining-Discovery of Rough Laws in Systems, System Engineering and Electronics, Vol. 17, Nº 4, 919-926

Li, G-D; Yamaguchi, D; Nagai, M (2006a): A Grey-Based Approach to Suppliers Selection Problem,Teykio Un;Kanagawa Un, Yokohama.

Li, G-D; Yamaguchi, D; Nagai, M (2006b): Non-Equivalence Grey Model based on Grey Interval Weighthing Accumulate Generating Operation, Proceedings of MLMTA, CSREA Press, Warrenton, Georgia

Liang, J; Xu, Z (2002): The Algorithm on Knowledge Reduction in Incomplete Information Systems, Int. Jour. Of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 10, Nº 1, 95-103

Liu, Sifeng; Forrest, Jeffrey (2007): The Current Developing Status on Grey System Theory, The Journal of Grey Systems Theory, 2, 111-123.

Liu, Sifeng; Lin, Yi (2006): Grey Information: Theory and Practical Applications, Springer, New York

Lu, Meng; Wevers, Kees (2006): Grey System Theory And Applications: A way Forward, 11th 灰色系統理論與應用研討會 (11º Seminario de Aplicación de Teoría de Sistemas Grises), Hsinchu, Taiwan

Min, F; Liu, Q; Fang, Ch (2008): Rough sets approach to symbolic value partition, International Journal of Approximate Reasoning, 49; 689-700

Nabwey, H; El-Paoumy, M (2013): An Integrated Methodology of Rough Sets Theory and Grey System For Extracting Decision Rules, International Journal of Hybrid Information Technology Vol. 6, Nº 1, 57-65

Olson, D; Wu, D (2006): Simulation of fuzzy multiattribute models for grey relationships, European Journal of Operational Research, 175, 111-120

Pawlak, Zdzislaw (1982): Rough Sets, International Journal of Information and Computer Sciences, Vol.11, pp. 341- 356

Pawlak, Zdzislaw (1996): Rough sets, rough relations and rough functions, Fundamenta Informaticae, Vol. 27, Nº 2-3, 103-108

Pei, L; Wang, Z-x (2013): An Optimized Grey Cluster Model for Evaluating Quality of Labor Force, Journal of Software, Vol. 8, Nº 10, 2489-2494

Peters, James,; et. al (2009): Transactions on Rough Sets X, Springer, Berlín

Rissino, Silvia; Lambert-Torres, G (2009): Cap. 3: Rough Set Theory-Fundamental Concepts, Principals, data Extraction, and Applications; en: Data Mining and Knowledge Discovery in Real Life Apllications, I-Tech, Viena

Salama, Amgad. S (2011): Some Topological Properties of Rough Sets with Tools for Data Mining, IJCSI, Vol.8, Issue 3, 588-595

Salama, Amgad S; Abu-Donia, H. M (2012): Generalizations of Rough Functions in Topological Spaces by Using Pre-Orden Open Sets, Journal of Inteligent Learning Systems and Applications, 4, 127-134

Shafer, Glenn (1990): Perspectives on the theory and practice of belief functions. International Journal of Approximate Reasoning **3** 1-40

Shao, Y; Su, H-j (2012): On Approximate Grey Model DGM(2,1), AASRI Procedia, Vol. 1, 8-13

Shi, Kaiquang (2005): Function S-Rough Sets and Function Transfer, Advances in System Sciences and Applications, Vol. 5, Nº 1, 1-8

Szelak, D; Ziarko, W (2005): The investigation of the Bayesian rough set model, International Journal of Approximate Reasoning, 40; 81-91

Tay, F; Shen, L (2002): Economic and financial prediction using rough set model, European Journal of Operation Research, 141, 641-659

Wu, Desheng, et. al. (2006): Data mining and simulation: a grey relationship demonstration, International Journal of Systems Science, Vol. 37, Nº 20, 981-986

Wu, Qiang (2010): Rough Set Approximation in Grey Information System, Journal of Computational Information Systems 6:9, 3057-3065

Wu, Q; Liu, Z (2009): Real formal concept analysis based on grey-rough set theory, Knowledge Based Systems, Vol. 22, I. 1, 38-45

Wu, S. X , et. al. (2006): Study of Grey Rough Set Model Based on Tolerance Relation, 9th. Int. Conf. ICARCV, pp. 1924-1929

Weisberg, Jonathan (2010): Dempster-Shafer Theory, Northern Inst. Of Philosophy, Universidad de Toronto

Xie, N; Liu, S (2009): Discrete grey forecasting model and its optimization, Applied theory Mathematical Modelling, 33; 1173-1186

Xu, J; Tao, Z (2012): Rough Multiple Objective Decision Making, CRC Press, Boca Raton

Yao, Y. Y (2003): On Generalizing Rough Set Theory, 9th. Int. Conference RSFDGrC, pp. 46-51

Yu, D; Hu, Q; Wu, C (2007): Uncertainty measures for fuzzy relations and their applications, Applied Soft Computing 7; 1135-1143

Yu, X; Le, Y; Li, Z (2012): The Applications of Grey Systems in Futures Price Forecasting, Int. J. of Science and Technology, V.2 Nº 12, 860-864

Xia, Xintao (2012): Scientific View in Grey System Theory, Asian Social Science, Vol. 8, Nº 8, 103-106

Zavadskas, E. Z, et. Al (2009): Multi-Attribute Decision-Making Model by Applying Grey Numbers, INFORMATICA, Vol. 20 Nº 2, 305-320